Réduction des endomorphismes normaux dans un espace euclidien

Théorème : Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal (qui commute avec son adjoint). Il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} D_p & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix}$$

où D_p est diagonale et les J_i sont de la forme $\begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ où les b_i sont non nuls.

Lemme 1 : Il existe un sous espace-vectoriel de E stable par u de dimension 1 ou 2.

Lemme 2 : Si un sous e-v F est stable par u, $F^{\perp}$ l'est aussi.

Lemme 3 : Il existe $F_1, ..., F_r$ des sous e-v de dimension 1 ou 2 stables par u tels que $E = \overset{\perp}{\bigoplus} F_i$.

Lemme 4 : Si $n = 2$, deux cas se distinguent :
1) Soit u admet une valeur propre réelle et est diagonalisable en base orthonormée.
2) Sinon il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u soit de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où b est non nul.

Preuve lemme 1 : Si u admet une valeur propre réelle λ, il suffit de considérer Vect(x) où x est un élément non nul du noyau de $u - \text{Id}$.
Si ce n'est pas le cas on considère π_u le polynôme minimale de u. Comme notre corps est $\mathbb{R}$ on sait qu'il existe un facteur irréductible de π_u de degré 2 de la forme $X^2 + aX + b$. On écrit alors $\pi_u(X) = (X^2 + aX + b)Q(X)$. Comme π_u est minimal et $\deg(\pi_u) > \deg(Q)$, u n'est pas annulé par Q. On en déduit que $V = u^2 + bu + a\text{Id}$ n'est pas injectif (sinon V serait bijectif et alors $Q(u)$ annulerait Im$(V(u)) = E$). Soit alors x un élément non nul du noyau de $V(u)$ et $P = \text{Vect}(x, u(x))$. On a alors P stable par u et $\dim(P) = 2$ sinon x serait vecteur propre d'une valeure propre réelle. $\square$

Preuve lemme 2 : Si $F = \{0\}$ ou $F = E$, c'est clair. Sinon on sait que $E = F \bigoplus F^{\perp}$. On peut alors se donner une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle u est de la forme $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$. On sait aussi que Mat$_{\mathcal{B}} u = {}^tA$. Comme u est normal, on a alors $A^tA = {}^tAA$ d'où, après avoir fait le produit blocs par blocs, on en déduit que $A_1\, {}^tA_1 + A_2\, {}^tA_2 = {}^tA_1 A_1$. Ainsi, la trace étant linéaire, Tr$(A_2\, {}^tA_2) = 0$ car la trace est invariant par transposition. On sait que l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A\, {}^tB)$ est un produit scalaire donc en particulier définie.

Ainsi, $\mathrm{Tr}(A_2\,{}^tA_2) = 0$ implique que A_2 est nulle donc A est diagonale par bloc et $F^\perp$ est alors stable par u. $\square$

Preuve lemme 3 : Par récurrence sur la dimension n.
Initialisation : Si $n = 1$ ou $n = 2$, le lemme 1 suffit.
Hérédité : On suppose le résultat vrai pour $n = 1, \dots, n-1$. Par le lemme 1 on se donne F sous-espace de E stable par u de dimension 1 ou 2. Par le lemme 2 on sait que $F^\perp$ est stable par u donc on utilise l'hypothèse de récurrence sur $u_{|F^\perp}$ (qui est normale sans soucis, mais il ne faut pas oublier de le préciser !!) ce qui permet de conclure car on écrit alors $F^\perp = \bigoplus F_i$ (avec les F_i de dimension 1 ou 2 et stables par u) et donc $E = F \bigoplus F^\perp = F \bigoplus F_i$. $\square$

Preuve lemme 4 : Si u a une valeur propre réelle λ on peut se donner $e_1 \in \ker(u - \lambda \mathrm{Id})$ non nul et unitaire. D'après le lemme 2, comme $\mathbb{R}e_1$ est stable par u, $\mathbb{R}e_1^\perp$ l'est aussi. Ainsi $u_{|\mathbb{R}e_1^\perp}$ se doit d'être une homothétie. Soit alors $e_2 \in \mathbb{R}e_1^\perp$ unitaire et μ tels que $u(e_2) = \mu e_2$. On a alors $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)} u = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
Si ce n'est pas le cas on se donne $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Comme u est normale on a la relation $A\,{}^tA = {}^tAA$ ie

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors que $c = \pm b$. De plus, $ac + bd = ab + cd$ donc $(c-b)(a-d) = 0$ et on en déduit que $(a = d ou b = c)$. De plus, χ_A a un discriminant strictement négatif (sinon A aurait des valeurs propres réelles) donc $(a+d)^2 - 4(ad - bc) < 0$. Si $b = c$ on peut montrer que le discriminant est positif en utilisant une identité remarquable donc nécessairement $a = d$ et $b = -c$ (b est nécessairement différent de 0 sinon A serait diagonalisable). $\square$

Preuve du théorème : Récurrence sur $\dim(E) = n$.
Initialisation : Si $n = 1$ c'est direct et si $n = 2$ c'est le lemme 4.
Hérédité : On suppose le résultat vrai pour $n = 1, \dots, n-1$ et $dim(E) = n$.
Par le lemme 1 on se donne F un sous-espace stable de dimension 1 ou 2 stable par u. On utilise alors l'hypothèse de récurrence sur $u_{|F^\perp}$, on utilise le lemme 4 pour trouver une base adaptée à F puis on concatène les deux bases. $\square$

Pré-requis importants : Il faut :

- savoir démontrer la décomposition d'un espace en un sous-espace et son orthogonal
- connaître le lien entre la matrice de u et u^* dans une certaine base
- être au courant que les récurrences (notamment celle de la preuve du théorème) sont écrites très succinctement et y avoir réfléchis plus en détail avant